LA CUADRATURA DEL CÍRCULO.

2

LA CUADRATURA

DEL CÍRCULO,

hallada y demostrada sintéticamente.

POR

D. Joaquin Cáceres y Arias,

DOCTOR EN LA UNIVERSIDAD DE BOLONIA.

Dedicada á S. M. la Reina Doña Isabel II.



obe.
Quid didicisse nisi hoc fermentum, et quæ semel intus
Innata est, rupto jecore, exierit caprificus?
PERS.—*Sat. I.*

SALAMANCA: IMPRENTA DE MORAN.

1844.

NOTA. *Lo que vulgarmente se entiende por la cuadratura del círculo suele ser su rectificacion, ó la relacion del diámetro á la circunferencia, ó vice-versa: todas son cuantidades que dependen unas de otras.*

A S. M. la Reina
DOÑA ISABEL II.

Señora:

Tan sublime problema debe ser presentado á tan escelsa Reina: el sub-

dito fiel de V. M. que lo ofrece carece de relaciones para poderlo presentar; pero si está evidentemente demostrado, ya llegará á LL. RR. PP. de V. M. y á los oidos de todos: si no lo está, sepultado quedará en el olvido, sin hacer daño á nadie.

Otra razon hay para ofrecerle á V. M., y es que habiendo el oferente discurrido acerca de él muchos años, de tal suerte que hasta se ha olvidado de sí mismo, impidiéndole esta idea aun el mismo estudio de la Geometría, por fin cree que lo acertó precisamente el dia en que V. M. fue declarada mayor de edad.

Señora: A LL. RR. PP. de V. M.

Joaquin Cáceres.

Ciudad-Rodrigo 25 de Diciembre de 1843.

PRÓLOGO.

La relacion del diámetro á la circunferencia está encerrada en el mismo círculo: de alli no puede escapar: hay un punto en que el radio mas el coseno es al seno como la circunferencia al diámetro, ó lo que es lo mismo, la abscisa á la ordenada en igual relacion: determinando y (por medio de sus diferenciales) sacado x de la ecuacion del círculo.



LA CUADRATURA DEL CÍRCULO.

PROPOSICION I.—Figura 1.ª

Estampar un polígono de lados n *en un semicírculo.*

Pónganse por derecho sus lados *n*, de suerte que sean iguales á la línea AB, álcese desde el punto B una perpendicular igual á la diagonal de dicho polígono, que será BD, tírese la AD. Desde el punto D álcese una perpendicular á la AD, hasta que corte la AB alargada en C: divídase la AC por medio en E, y estará ejecutada la operacion, pues el semicírculo ADC tocará los estremos A y C por ser líneas iguales, y el estremo D por ser recto el ángulo ADC.

C. S. D. H.

PROPOSICION II.—Figura 2.ª

Reducir la operacion antecedente á menor escala.

Supongamos construida la operacion antecedente, y que sea G el punto hallado, póngase el semicírculo HGF sobre el menor que se desea dividir ADC, centro sobre centro, y diámetro sobre diámetro, y tírese la línea GE de la circunferencia al centro de la curva.

PROPOSICION III.—Figura 2.ª

Ampliar la operacion á mayor escala.

Es un corolario de las precedentes, solo que el semicírculo en cuestion será el FGH.

Corolario.

En ambas operaciones será la MF á la DM, y la NF á la NG como el contorno de un póligono de lados n á la diagonal del mismo.

Escolio.

Estos polígonos podrán significar los inscritos, ó los circunscritos.
Sean los inscritos.

PROPOSICION IV.

Estampar los circunscritos.

Estampados los inscritos, los circunscritos evidentemente se estamparán todos cuando se aproximen al círculo (y no es necesaria mucha aproximacion por ser la relacion aproximada de Lagny : : 1 : 3 con una mantisa de 127 decimales): se ejecuta buscando una cuarta proporcional entre el contorno inscrito y circunscrito, del polígono de lados n, no estampado, y el contorno inscrito y estampado, ó mejor el contorno que ya está estampado y se va á determinar como inscrito.

Escolio y Corolario.

Á esta operacion la llamo avenir los omólogos, y del mismo modo que se han avenido acerca del polígono de lados n se podrán avenir acerca del de lados $(n+b)$.

ESPLICACION DE LA FIGURA 3.ª

Ecuacion del círculo $y^2=2ax-x^2$.

ABD es el semicírculo en que se ha de encerrar la cuadratura ó mejor la rectificacion.

Af, es el radio mas el coseno: es la abscisa, es x, es el omólogo avenido de un contorno de un polígono de lados n inscrito.

ef, es el seno, es la ordenada, es el omólogo de la diagonal del polígono de lados n inscrito, es y.

An, el omólogo del contorno del polígono de lados n circunscrito, es $(x+dx)$.

mn, es $(y-dy)$; no es el omólogo del diámetro del circunscrito.

Ah, el omólogo del contorno inscrito de lados $n+b$.

gh, es el omólogo de su diámetro ó de su diagonal.

Al, el omólogo del contorno circunscrito de lados $n+b$.

kl, es $(y-dy)$ etc. etc.

fn$=$sm$=dx$.

es$=$RP$=dy$.

hl$=$uk$=dx$.

ug$=dy$.

etc.

La ordenada y será á veces, ef, gh, ij, kl, mn, hasta que se determine.

$2a$ es el diámetro AB.

a es el radio Ci$=$CB$=$CA$=$Cm hasta que por la posicion, Ci, quede determinada la y.

etc.

PROPOSICION V.—FIGURA 3.ª

Resolucion.

Siendo $x^2-2ax+y^2=0$, será $x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$: el signo doble $\pm$ quiere decir que tiene dos soluciones una á la derecha, y otra á la izquierda del centro C.

a á la derecha.

.on el contínuo avenir de los omólogos, el es;), hl, vendrá á ser menor que cualquiera cuantid. ıada, y entonces $dy=0$, y tambien $dx=0$, y las líneas, mn, kl, y tambien las ef, gh caerán sobre la ij, de suerte que no vendrá á ser, ó no vendrá á quedar mas que una línea sola, mas que una ordenada sola ij, que será la que dé la relacion del diámetro á la circunferencia, suponiendo que la, Cm, se va acercando á su puesto que es Ci, advirtiendo que el coseno cuyo valor es $\sqrt{a^2-y^2}$ será á veces Cl, Cn, Cj, segun marquen las diferenciales dx, dy, con que la ecuacion será (puesto que y mengua)

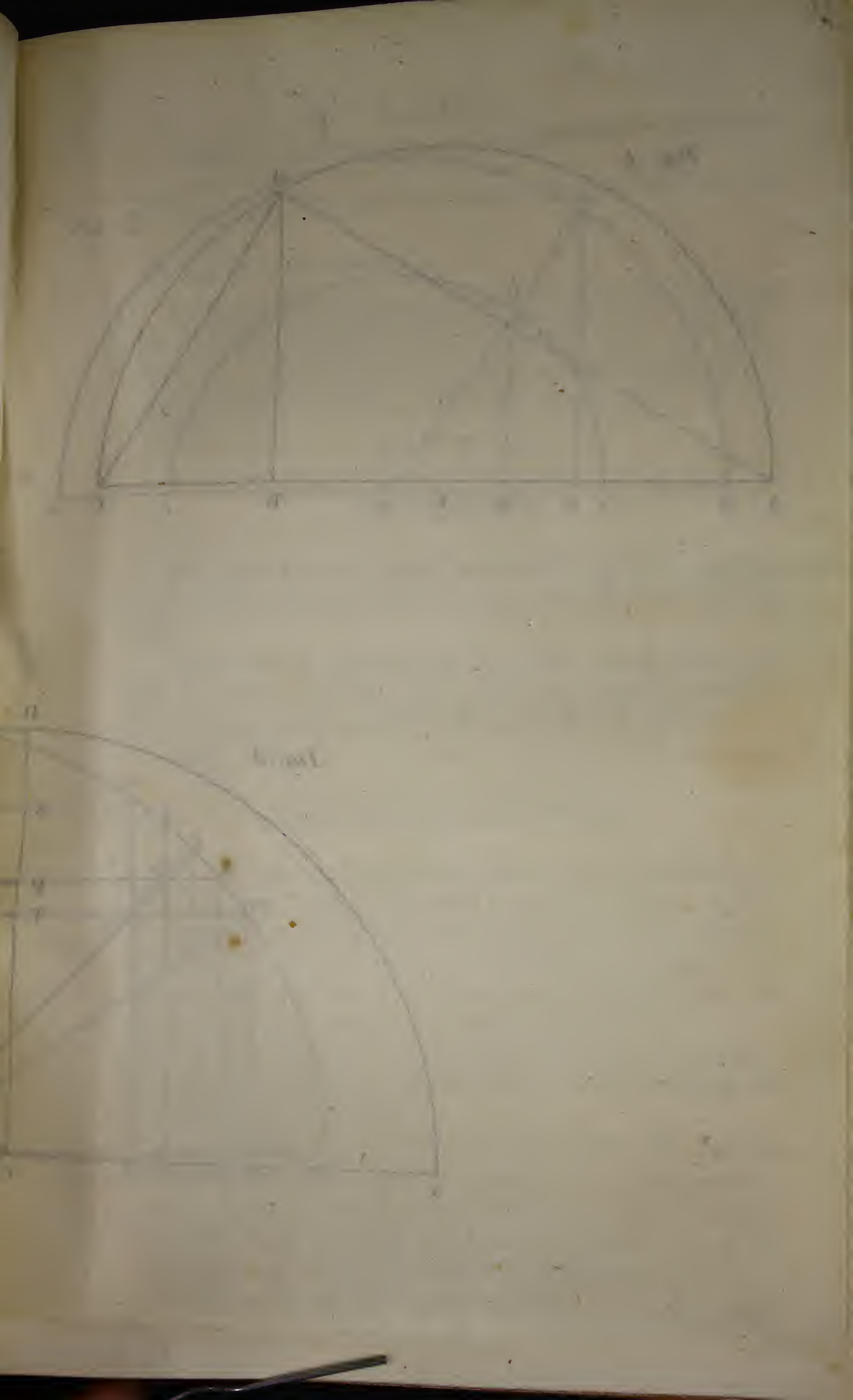
$$\frac{y-dy}{x+dx}=\frac{y}{x}$$

y la relacion será $\frac{y-dy}{x+dx}$

Y la integral de la ecuacion será $xy=0$.

Esta integral quiere decir (puesto que los autores rectifican el círculo y muchas curvas integrando, y en cuanto al primero lo verifican en el cuarto de círculo donde las diferenciales tienen el mismo signo) que siendo la integracion la inversa de la diferenciacion, y no significando sino una misma cosa, tambien por ella se halla la rectificacion del círculo, invirtiendo la operacion: pero no juzgo oportuno detenerme en ello, porque tal vez erraré, y entonces seria inútil dilatarme mas.

Con que para determinar y, puesto que han de ser cero las diferenciales, basta estampar los omólogos de un polígono de lados n inscrito, que serán ef, y fA, y el omólogo del circunscrito nA, resultando nm$=(y-dy)$: tirar la mP paralela á la CB y por el punto s donde se cruzan tirar el radio Ci en que con el contínuo estampar, ó avenir los omólogos, las diferenciales han disminuido, hasta que se han reducido á cero, lo cual dará el punto, i, buscado, y desde alli bajar una perpendicular ij al diámetro AB, que marcará la relacion de la circunferencia al diámetro.



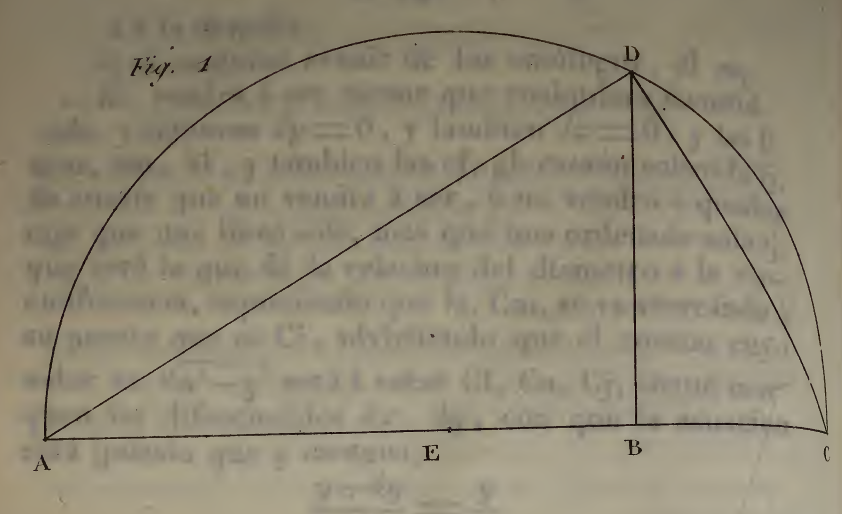
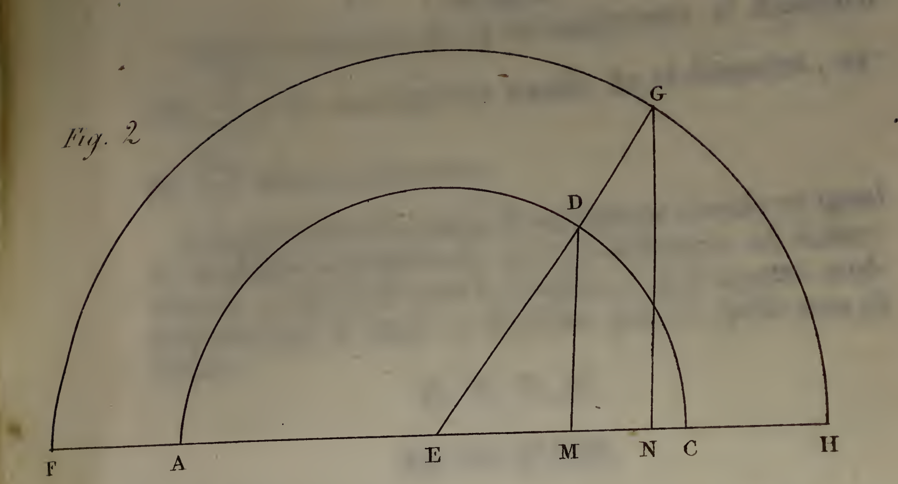
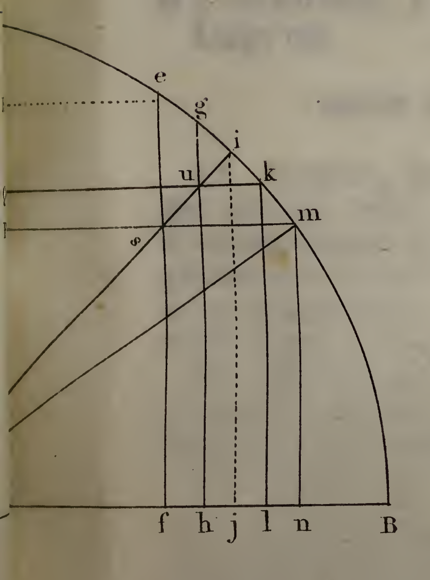


Fig. 3

A


Fig. 2
G
D
F
A
E
M
N
C
H


e
g
i
u
k
m
s
f
h
j
l
n
B



Luego la relacion de la circunferencia al diámetro será $\frac{y}{x}$ y de consiguiente siendo $2a$ el diametro, será $\frac{2ay}{x}$ la circunferencia.

Luego la circunferencia de cualquier círculo es igual al diámetro multiplicado por la ordenada asi determinada, y dividido por la abscisa, ó al diámetro multiplicado por el seno, y dividido por el radio mas el coseno.

C. S. D. H.

REASUNCION.

El punto de determinacion se halla entre el polígono inscrito y circunscrito, y donde las diferenciales son cero.

Es asi que la estremidad del radio, construido como lo hemos hecho, yace entre el polígono inscrito y circunscrito, y allí las diferenciales son cero.

Luego etc.

SIGUEN ALGUNAS REFLEXIONES.

1.ª Siendo ij, figura 3.ª media, proporcional, se sigue que es á veces diámetro y circunferencia, y que la circunferencia es tambien igual al diámetro multiplicado por el seno verso, y dividido por el seno recto asi determinado: ó al diámetro multiplicado por el radio menos el coseno, y dividido por el seno.

2.ª Es claro que toda fraccion que tenga sus aproximaciones mayores y menores que la en cuestion, se hallará por este método.

3.ª Nótese que siendo (en el valor del coseno $\sqrt{a^2-y^2}$) y muy pequeño, sobrará á la circunferencia para que y sea diámetro: puede y ser de tal magnitud que dos, ó n circunferencias se envuelvan al su rredor: siendo y muy grande no alcanzará la circunferencia á envolver el diámetro: y siendo $y^2>a^2$

será imaginario, pero no absurdo: esto quiere decir que la ordenada es mayor que el radio, y de consiguiente no cabrá en el semicírculo ABD, pero no quita que la parte saliente tenga alguna relacion con Aj; antes bien puede y ser infinito, y entonces la abscisa Aj será una parte infinitesimal finita, de un círculo infinito: hay mas: la parte de y que esceda sobre a vuelve á entrar otra vez en $\sqrt{a^2—y^2}$, hasta el infinito, de suerte que si en la parte escedente $y>a$, vuelve otra vez al imaginario: y todos estos cosenos está en nuestro arbitrio el determinarlos: *todo imaginario es cuantidad que escede sus límites.*

4.ª Cada vez que y sea $>a$ muda su signo, donde se ve de qué manera una cuantidad que va creciendo convierte el + en — sin necesidad de pasar por el infinito, estando bien patente el maximun: finalmente, siendo el valor de y la norma del arco, se sigue que las raices imaginarias se integran por arcos de círculo.

5.ª Añado mas: que puesto que á cada valor de la diferencia (positiva ó negativa) entre la ordenada y el radio (pasando por n valores de la igualdad) corresponde el mismo arco, las raices imaginarias denotan arcos reales de círculo á la derecha ó á la izquierda del centro.

6.ª Sea de esto lo que se quiera, lo cierto es que no habiendo mas criterios de igualdad que tres, supraposicion, anología y límites, el círculo los comprende todos.

etc.

etc.